ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 161

Α4. **α.** Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

δ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Πρέπει: $\left.\begin{matrix} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in[0,+\infty) \\ \sqrt{x}\in(-\infty,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\leq x\leq 1$,.άρα: $D_{f\circ g}=[0,1]$.

Ακόμα: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^4-2(\sqrt{x})^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x)=2(x-1)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα δηλ.είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

Θέτω $y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2 \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y}=|x-1| \overset{x-1\leq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{y}=-x+1\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$,άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x\in[0,1]$.

Β3. i) Είναι: $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2}, x=1 \end{cases}$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$,άρα η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ακόμα $\varphi(0)\neq\varphi(1)$ ($\varphi(0)=1$) άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Επειδή η φ ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών τότε για κάθε αριθμο η ανάμεσα στο $[0,1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\eta\mu\alpha\in(0,1)$.

Επειδή $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\uparrow(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$ ισχύει.